

Simboli logici

1.2 – Simboli logici

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Per poter analizzare il ragionamento matematico, è necessario innanzitutto individuare quali simboli e costrutti linguistici vengono usati. Scorrendo un testo di analisi matematica ci si imbatte in vari tipi di simboli.

- Le lettere x, y, z, \dots in genere designano numeri reali arbitrari, mentre le lettere k, m, n, \dots denotano numeri naturali. In ogni caso, il loro ruolo è quello di essere *variabili*, ovvero quello di indicare un generico numero anziché identificarne uno specifico.
- Al contrario, certe lettere designano numeri ben specifici: sono cioè delle *costanti*. Per esempio la lettera π rappresenta un preciso numero reale, ovvero il rapporto tra la lunghezza del diametro e la lunghezza della circonferenza. Il suo valore è $\pi = 3,14159\dots$

- Alcuni simboli denotano *operazioni* tra numeri o particolari *funzioni*. Ad esempio, i simboli $+$ e \cdot denotano le operazioni binarie di somma e prodotto, mentre $\sqrt{\cdot}$ indica la funzione “radice quadrata”.
- Altri simboli denotano *relazioni* tra numeri, come il simbolo $<$ che usiamo per indicare l'ordine tra i numeri.
- Il simbolo $=$, che denota l'*uguaglianza*, è anch'esso un simbolo per una relazione tra oggetti, ma il suo significato è fissato ed indipendente dal contesto: esso asserisce che l'oggetto scritto a sinistra del segno di uguale coincide con l'oggetto scritto a destra.

Vedremo che tutte queste tipologie di simboli giocheranno un ruolo fondamentale quando presenteremo la logica del prim'ordine.

Ci sono poi alcune espressioni che ricorrono in ogni testo matematico:

- le particelle “non”, “e”, “o”
- “se ... allora ...”
- “... se e solo se ...”
- “c'è almeno un x tale che ...”
- “per ogni x ...”.

Espressioni di questo genere le abbiamo anche ripetutamente incontrate nella nostra trattazione informale del concetto di dimostrazione (Sezione 1.1).

Per scrivere in modo non ambiguo i ragionamenti e le dimostrazioni introduciamo dei simboli che rappresentano questi costrutti linguistici, ovvero i **connettivi**

\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow

ed i simboli di **quantificatore**

\exists \forall

Negazione

I connettivi e i quantificatori si dicono **costanti logiche**. Vediamo il loro significato e alcune delle loro proprietà di base.

\neg denota la **negazione** e serve per affermare l'opposto di quanto asserisce l'affermazione a cui si applica.

Per esempio

$$\neg(x < y)$$

significa che x *non* è minore di y , ovvero che $x \geq y$.

Data un'affermazione P , si ha sempre che P è vera se e solo se $\neg P$ è falsa, e questo accade se e solo se $\neg\neg P$ è vera. Questo mostra che le espressioni P e $\neg\neg P$ sono *equivalenti*, ovvero che vale la

Legge della doppia negazione

$$P \equiv \neg\neg P.$$

Inoltre

$$P \equiv Q \quad \text{se e solo se} \quad \neg P \equiv \neg Q.$$

Infatti, in qualunque contesto si ha che se $P \equiv Q$ allora

$$\begin{aligned} \neg P \text{ è vero} & \quad \text{se e solo se} \quad P \text{ è falso} \\ & \quad \text{se e solo se} \quad Q \text{ è falso} \\ & \quad \text{se e solo se} \quad \neg Q \text{ è vero.} \end{aligned}$$

Similmente si dimostra anche che se $\neg P \equiv \neg Q$ allora $P \equiv Q$.

Congiunzione

\wedge è la **congiunzione** e serve per asserire che due fatti valgono contemporaneamente.

Per esempio

$$(x \text{ è pari}) \wedge (x \text{ è un quadrato perfetto})$$

significa che il numero x è sia pari che un quadrato perfetto (ovvero è il quadrato di qualche numero): poiché abbiamo dimostrato che se k^2 è pari allora anche k lo è, questo vuol dire che $x = (2n)^2 = 4n^2$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Anche le particelle “ma” e “però” sono delle congiunzioni, a cui noi attribuiamo una connotazione avversativa. Tuttavia, in matematica il significato di “P ma Q” o di “P però Q” è lo stesso di “P e Q” e quindi si scrivono comunque come “ $P \wedge Q$ ”.

Il connettivo \wedge è commutativo, poiché asserire $P \wedge Q$ è come asserire $Q \wedge P$, in simboli

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P,$$

ed è associativo, poiché asserire $P \wedge (Q \wedge R)$ è la stessa cosa di asserire $(P \wedge Q) \wedge R$ (ovvero: P , Q ed R sono tutt'e tre vere), in simboli

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R.$$

È chiaro che in qualunque contesto ci troviamo, se P e Q sono vere allora anche $P \wedge Q$ lo è, in simboli

$$P, Q \models P \wedge Q.$$

Viceversa, se $P \wedge Q$ è un'affermazione vera, allora lo sono in particolare sia P che Q , in simboli possiamo scrivere che

$$P \wedge Q \models P \quad \text{e} \quad P \wedge Q \models Q.$$

Infine

Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora $P \wedge Q \equiv R \wedge S$.

Infatti se siamo in un contesto in cui vale $P \wedge Q$, in tale contesto devono necessariamente valere sia P che Q . Dato che $P \models R$ e $Q \models S$, in tale contesto varranno sia R che S , da cui concludiamo che varrà anche $R \wedge S$.

Il ragionamento mostra che in ogni contesto in cui vale $P \wedge Q$ vale anche $R \wedge S$, per cui

$$P \wedge Q \models R \wedge S$$

In maniera simile si dimostra $R \wedge S \models P \wedge Q$, da cui

$$P \wedge Q \equiv R \wedge S.$$

Disgiunzione

\vee è la **disgiunzione** (inclusiva) e corrisponde al *vel* latino o all'inglese *or*: questo o quello o eventualmente entrambi.

In particolare, affermare che vale $P \vee Q$ *non* vuol dire che soltanto una tra P e Q è vera. Se asseriamo ad esempio che

$$(x \text{ è pari}) \vee (x \text{ è un quadrato perfetto})$$

intendiamo dire che il numero x può essere pari (cioè della forma $2n$, per esempio 6), o un quadrato perfetto (cioè della forma n^2 , per esempio 9), o magari un numero che è un quadrato perfetto pari (cioè della forma $4n^2$, per esempio 4).

Anche il connettivo \vee è commutativo, poiché $P \vee Q$ ha lo stesso significato di $Q \vee P$, in simboli

$$P \vee Q \equiv Q \vee P,$$

e associativo, poiché $P \vee (Q \vee R)$ ha lo stesso significato di $(P \vee Q) \vee R$ (ovvero: almeno una tra P , Q ed R è vera), in simboli

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R.$$

Se sappiamo che una certa affermazione P è vera, allora possiamo anche asserire che $P \vee Q$ è vera, qualsiasi sia l'affermazione Q ; infatti, $P \vee Q$ è vera quando è vera almeno una delle due affermazioni P e Q , e nel nostro caso P lo è. Viceversa, se Q è vera allora anche $P \vee Q$ lo è, qualunque sia P . Quindi

$$P \models P \vee Q \quad \text{e} \quad Q \models P \vee Q.$$

Invece a partire da $P \vee Q$ non possiamo né concludere P né concludere Q . Infatti, se $P \vee Q$ è vera sappiamo solo che almeno una tra P e Q è vera, ma non possiamo sapere quale (in genere dipenderà dal contesto).

Invece, se sappiamo che $P \vee Q$ è vera ma che P è falsa, allora l'unica possibilità è che Q sia vera (se P e Q fossero entrambe false, sarebbe falsa anche $P \vee Q$). Similmente, se $P \vee Q$ è vera ma Q è falsa, allora possiamo concludere che P deve essere vera. Questa è la

Legge della disgiunzione

$$P \vee Q, \neg P \models Q \quad \text{e} \quad P \vee Q, \neg Q \models P.$$

Infine

Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora $P \vee Q \equiv R \vee S$.

Infatti se vale $P \vee Q$, allora certamente almeno una tra P e Q vale. Nel primo caso (P è vera), poiché $P \models R$ e $R \models R \vee S$ si ottiene per composizione che deve valere $R \vee S$. Nel secondo caso (Q è vera), poiché $Q \models S$ e $S \models R \vee S$ si ottiene nuovamente $R \vee S$. Quindi in ogni caso si ha che vale $R \vee S$, ovvero

$$P \vee Q \models R \vee S.$$

Similmente si dimostra

$$R \vee S \models P \vee Q,$$

da cui

$$P \vee Q \equiv R \vee S.$$

Leggi di De Morgan

Combinando quanto visto finora riguardo ai connettivi \neg , \wedge e \vee , possiamo già fare alcune osservazioni interessanti. Ad esempio, possiamo argomentare che valgono le

Leggi di De Morgan

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \quad \text{e} \quad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q .$$

Infatti, se sappiamo che $P \wedge Q$ è falsa, allora almeno una tra P e Q deve essere falsa: questo mostra che $\neg(P \wedge Q) \models \neg P \vee \neg Q$.

Viceversa, se sappiamo che almeno una tra P e Q è certamente falsa, allora $P \wedge Q$ è anch'essa falsa: questo dimostra che $\neg P \vee \neg Q \models \neg(P \wedge Q)$, da cui $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.

Lasciamo al lettore il verificare con ragionamenti analoghi che $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

Negando entrambi i termini dell'equivalenza $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ si ottiene, sfruttando quanto visto per la \neg , che

$$\neg\neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q),$$

da cui per la legge della doppia negazione

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q).$$

Questo vuol dire che la congiunzione \wedge può essere “definita” a partire da negazione \neg e disgiunzione \vee : ogni affermazione che contenga una congiunzione potrebbe essere riscritta in maniera equivalente utilizzando al suo posto negazioni e disgiunzioni in modo opportuno.

Similmente, partendo da $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ e ragionando come prima si verifica che

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q),$$

ovvero che la disgiunzione \vee può essere “definita” a partire da negazione \neg e congiunzione \wedge .

Distributività

Valgono poi la **proprietà distributiva** di \vee su \wedge

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

e la **proprietà distributiva** di \wedge su \vee

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

Per la simmetria di \vee e \wedge si avrà anche

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad \text{e} \quad (P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R).$$

La dimostrazione di queste proprietà non è del tutto immediata: per questa ragione verrà posticipata alla Sezione 1.3 dove, utilizzando le tavole di verità, potremo controllarne in modo assai più semplice la validità.

Tautologie

Possiamo poi osservare che l'affermazione

$$P \vee \neg P$$

è sempre vera, qualunque sia P . Infatti, dato un qualunque contesto si ha che in esso o P è vera oppure P è falsa: nel primo caso si ottiene che $P \vee \neg P$ è vera poiché $P \models P \vee \neg P$, nel secondo caso si ottiene nuovamente che $P \vee \neg P$ è vera poiché $\neg P \models P \vee \neg P$.

Affermazioni come $P \vee \neg P$, ovvero affermazioni che sono sempre vere, indipendentemente dal contesto, verranno chiamate **tautologie**. In simboli, scriviamo

$$\models Q$$

per dire che Q è una tautologia.

Contraddizioni

Siccome $P \vee \neg P$ è sempre vera, la sua negazione $\neg(P \vee \neg P)$ è sempre falsa. Poiché per le leggi di De Morgan

$$\neg(P \vee \neg P) \equiv \neg P \wedge \neg\neg P$$

e per la legge della doppia negazione

$$\neg P \wedge \neg\neg P \equiv \neg P \wedge P$$

applicando la simmetria di \wedge all'ultima espressione otteniamo che

$$P \wedge \neg P$$

è sempre falsa, qualunque sia P .

Affermazioni di questo tipo, ovvero affermazioni che sono sempre false, indipendentemente dal contesto, verranno chiamate **contraddizioni**.

Si può anche osservare che

$$Q \models P \vee \neg P,$$

qualunque siano P e Q . Infatti asserire $Q \models P \vee \neg P$ significa dire che: “*in ogni contesto in cui vale Q , vale anche $P \vee \neg P$* ”. Ma poiché, $P \vee \neg P$ è *sempre* vera, sarà in particolare vera anche nei contesti in cui vale Q .

Quindi abbiamo verificato che effettivamente $Q \models P \vee \neg P$. Ovviamente $P \vee \neg P$ potrebbe essere sostituita da qualunque altra tautologia.

Viceversa,

$$P \wedge \neg P \models Q,$$

indipendentemente da P e Q . Infatti, poiché non accade mai che $P \wedge \neg P$ sia vera, allora è vero che “*in ogni contesto in cui vale $P \wedge \neg P$, vale anche Q* ” (semplicemente non c'è nessun contesto in cui si deve necessariamente verificare Q). Ovviamente $P \wedge \neg P$ potrebbe essere sostituita da qualunque contraddizione. Questo è il cosiddetto principio dell'**ex falso quodlibet**.

Implicazione

→ è l'**implicazione** e corrisponde all'espressione "se ... allora ...".

Precisare il significato dell'implicazione è piuttosto delicato ed è il primo scoglio in cui ci si imbatte quando si formalizza il ragionamento matematico. Infatti, se sappiamo che è vero che "*Se vale P allora vale Q*", allora saremo tutti concordi nel ritenere che in ogni contesto in cui P sia vera, si debba avere che anche Q è vera. Ma cosa dire dei contesti in cui P risulta falsa? Se ad esempio nel nostro contesto sia P che Q sono false, siamo ancora disposti a ritenere la frase "*Se vale P allora vale Q*" vera?

Per chiarire la situazione, cominciamo con un esempio. Consideriamo la seguente affermazione riguardante un generico numero reale x .

Se $\underbrace{x > 0}_P$ allora $\underbrace{x = y^2 \text{ per qualche } y \geq 0}_Q$.

Tale frase è chiaramente vera in ogni contesto in cui abbia senso valutarla: infatti, per ogni numero reale x se vale P , ovvero $x > 0$, allora basta porre $y = \sqrt{x}$ per avere che anche Q vale. Notiamo che anche nei contesti in cui $x \leq 0$, ovvero quando P è falsa, non possiamo ritenere l'affermazione precedente errata: semplicemente diremmo che in quel caso non c'è nulla da verificare perché l'affermazione impone vincoli solo per gli $x > 0$ (in particolare, è influente se Q sia vera o meno in tale contesto). In altre parole:

L'affermazione “Se P allora Q ” precedente risulterebbe falsa in un dato contesto, ovvero per un dato valore di x , solo se si verificasse che $x > 0$ (“ P vera”) ma x non fosse il quadrato di un numero positivo (“ Q falsa”).

Proviamo ora a considerare quest'altra affermazione riguardante un generico numero reale x .

$$\text{Se } \underbrace{x > 0}_P \text{ allora } \underbrace{x^2 > 1}_Q.$$

Anche questa frase è della forma “Se P allora Q ”, ma questa volta non saremo disposti a ritenerla vera in generale: più precisamente, noteremo che ci sono alcuni contesti in cui essa vale (ad esempio quando $x > 1$) e contesti in cui essa **non vale**. Questi ultimi sono esattamente quelli dati dai valori di x per cui accade che $x > 0$ (“ P vera”) ma $x^2 \leq 1$ (“ Q falsa”), ovvero i contesti in cui $0 < x \leq 1$.

Vediamo un ultimo esempio. La frase della forma $P \rightarrow Q$

Se *piove* allora *in cielo ci sono le nuvole.*
P Q

è chiaramente vera in ogni possibile contesto: in ogni possibile situazione, se sta effettivamente piovendo allora certamente ci devono anche essere delle nuvole in cielo da cui la pioggia cade. In altre parole, in qualunque contesto l'implicazione $P \rightarrow Q$ considerata è vera perché o non sta piovendo, oppure se sta piovendo allora necessariamente ci sono delle nuvole in cielo. Viceversa, l'affermazione

Se *in cielo ci sono le nuvole* allora *piove.*
Q P

è falsa in determinati contesti, ovvero quando accade che ci sia una giornata nuvolosa (“Q vera”) ma senza pioggia (“P falsa”). Quindi l'implicazione $Q \rightarrow P$ non può essere ritenuta vera in generale.

Riassumendo quanto discusso finora, abbiamo quindi che

- L'affermazione $P \rightarrow Q$ è **falsa** in un dato contesto se e solo se in tale contesto accade che P è vera ma Q è falsa, ovvero se in esso vale $P \wedge \neg Q$.
- Di conseguenza, $P \rightarrow Q$ è **vera** in un dato contesto se e solo se in tale contesto *non* vale $P \wedge \neg Q$; equivalentemente, se in esso vale $\neg P \vee Q$.

Infatti i nostri ragionamenti evidenziano che

$$\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q \quad \text{e} \quad P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q).$$

Dalla seconda equivalenza, per le leggi di De Morgan e della doppia negazione

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q.$$

In particolare, questo vuol dire che l'implicazione può essere “definita” a partire da negazione e congiunzione, oppure a partire da negazione e disgiunzione.

In accordo con la nostra intuizione, il significato dato all'implicazione cattura quello di conseguenza logica:

$$P \models Q \quad \text{se e solo se} \quad \models P \rightarrow Q.$$

Infatti, supponiamo che $P \models Q$. Allora in ogni contesto in cui vale P deve valere anche Q : in particolare, in nessun contesto può valere $P \wedge \neg Q$, per cui $\models \neg(P \wedge \neg Q)$. Poiché $\neg(P \wedge \neg Q) \equiv P \rightarrow Q$, abbiamo $\models P \rightarrow Q$.

Viceversa, supponiamo che $\models P \rightarrow Q$, ovvero che l'implicazione $P \rightarrow Q$ sia vera in qualunque contesto. Supponiamo di trovarci in un contesto in cui vale P , cosicché vale anche $\neg\neg P$ per la legge della doppia negazione. Siccome $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$, in tale contesto deve valere anche $\neg P \vee Q$. Per la legge della disgiunzione applicata a $\neg P \vee Q$ e $\neg\neg P$, si ha allora che Q vale in tale contesto. Quindi abbiamo verificato che $P \models Q$.

Più in generale, ricordiamo che $P_1, \dots, P_n \models Q$ se in ogni contesto in cui tutte le P_1, \dots, P_n sono vere si ha che anche Q è vera. Poiché in ogni contesto si ha che P_1, \dots, P_n sono tutte vere se e solo se è vera $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$, allora

$$P_1, \dots, P_n \models Q$$

se e solo se

$$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \models Q$$

se e solo se

$$\models P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q.$$

In matematica, si usano anche altre espressioni che sono equivalenti all'implicazione.

- Le espressioni “*affinché valga P deve valere Q*” oppure “*affinché valga P è necessario che valga Q*” significano che non può accadere che P valga ma Q no. Il loro significato è quindi equivalente a quello di “*se P allora Q*” e perciò si scrivono, in simboli, $P \rightarrow Q$.
- L'espressione “*affinché valga P è sufficiente che valga Q*” significa che non appena si sa che Q vale, allora anche P deve valere. Il suo significato è quindi equivalente a quello di “*se Q allora P*” e perciò si scrive, in simboli, $Q \rightarrow P$.

Osservazione

L'implicazione cattura il concetto intuitivo di **conseguenza**. Diciamo che Q è una conseguenza di P se ogni volta che si verifica P allora anche Q si deve verificare, ovvero $P \rightarrow Q$.

L'implicazione non ha invece nulla a che fare con il concetto di **causalità**. Infatti, si ritiene usualmente che P sia una causa di Q se è una *condicio sine qua non*, ovvero se non può accadere Q senza che si verifichi P . Questo vuol dire che se c'è un nesso di causalità tra P e Q , allora l'unica cosa che possiamo affermare è che $Q \rightarrow P$; non possiamo invece affermare che $P \rightarrow Q$, perché non possiamo asserire con certezza che P sia sufficiente, da sola, a causare Q (potrebbero essere necessarie altre concause affinché si verifichi veramente Q).

C'è poi un'ultimo aspetto di cui tener conto. A differenza di quanto accade per i concetti intuitivi di “conseguenza” e “causa”, è possibile valutare se è vero che $P \rightarrow Q$ anche quando P e Q sono affermazioni che non hanno nulla a che fare una con l'altra.

Ad esempio se P è l'affermazione

Il ghiaccio ha una temperatura di 100 gradi centigradi.

e Q è l'affermazione

L'Empoli vincerà il campionato di calcio nel 2028.

allora si può comunque ritenere l'implicazione $P \rightarrow Q$ vera (poiché non può certamente verificarsi che P valga ma Q no, essendo che P è sempre falsa), anche se evidentemente non c'è nessuna relazione di “conseguenza” o “causalità” tra P e Q nel senso intuitivo di tali termini.

Il connettivo \rightarrow *non* è affatto commutativo: $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$ hanno significati completamente diversi!

Infatti, se ad esempio Q è vera e P è falsa, allora l'implicazione $P \rightarrow Q$ risulterà vera, mentre l'implicazione $Q \rightarrow P$ risulterà falsa. Dunque queste due implicazioni *non* sono equivalenti.

Si verifica anche che \rightarrow *non* è associativo, ovvero che $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ e $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ *non* sono espressioni equivalenti.

Infatti, se ad esempio sia P che R sono false, allora è facile verificare che $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ è vera, mentre $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ è falsa (indipendentemente dal fatto che Q sia vera o meno).

L'implicazione $P \rightarrow Q$ è invece equivalente al suo **contrappositivo** $\neg Q \rightarrow \neg P$, in simboli

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P.$$

Infatti per la **legge della doppia negazione** e la **simmetria di \vee** si ha

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q &\equiv \neg P \vee Q \\ &\equiv \neg P \vee \neg\neg Q \\ &\equiv \neg\neg Q \vee \neg P \\ &\equiv \neg Q \rightarrow \neg P. \end{aligned}$$

Infine

Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora $P \rightarrow Q \equiv R \rightarrow S$.

Infatti, utilizzando quanto visto per negazione e disgiunzione si ha

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q &\equiv \neg P \vee Q \\ &\equiv \neg R \vee S \\ &\equiv R \rightarrow S. \end{aligned}$$

Modus Ponens

Dall'equivalenza $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ si può anche ricavare una delle più famose tra le leggi logiche, ovvero il

Modus Ponens

$$P \rightarrow Q, P \models Q .$$

Infatti, se siamo in un contesto in cui vale $P \rightarrow Q$, allora vale anche $\neg P \vee Q$. Se inoltre vale anche P , per la legge della doppia negazione vale anche $\neg\neg P$. Applicando la legge della disgiunzione, concludiamo che deve valere Q .

Bi-implicazione

\leftrightarrow è la **bi-implicazione** e corrisponde all'espressione "... se e solo se ...".

Quando asseriamo che "P se e solo se Q" intendiamo dire che "se P allora Q, e se Q allora P". In altre parole, $P \leftrightarrow Q$ è equivalente ad affermare

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P).$$

In particolare, $P \leftrightarrow Q$ è vera se e solo se in ogni contesto si verifica che o P e Q sono entrambe vere, oppure sono entrambe false.

Spesso in matematica "P se e solo se Q" lo si scrive come: "*condizione necessaria e sufficiente affinché valga P, è che valga Q*".

Utilizzando la commutatività della congiunzione e il fatto che $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$, si ottiene facilmente che la bi-implicazione è commutativa, ovvero

$$P \leftrightarrow Q \equiv Q \leftrightarrow P.$$

Si può anche dimostrare che la bi-implicazione è associativa, ovvero

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \equiv (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R.$$

Tuttavia la verifica di questo fatto è tutt'altro che banale e verrà posticipata alla Sezione 1.3, quando sapremo utilizzare le tavole di verità.

Utilizzando l'equivalenza $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ e le leggi viste per la congiunzione si ha che

$$P \leftrightarrow Q \models P \rightarrow Q \quad \text{e} \quad P \leftrightarrow Q \models Q \rightarrow P.$$

e

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow P \models P \leftrightarrow Q.$$

Infine, utilizzando le analoghe leggi riguardanti implicazione e congiunzione, si verifica facilmente che

$$\text{Se } P \equiv R \text{ e } Q \equiv S, \text{ allora } P \leftrightarrow Q \equiv R \leftrightarrow S.$$

Osserviamo infine che il bicondizionale cattura il concetto di equivalenza logica, ovvero che

$$P \equiv Q \quad \text{se e solo se} \quad \models P \leftrightarrow Q.$$

Infatti

$$P \equiv Q$$

se e solo se

$$P \models Q \quad \text{e} \quad Q \models P$$

se e solo se

$$\models P \rightarrow Q \quad \text{e} \quad \models Q \rightarrow P$$

se e solo se

$$\models (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

se e solo se

$$\models P \leftrightarrow Q.$$

\exists è il **quantificatore esistenziale**.

L'espressione $\exists xP$ si legge: “c'è un x tale che P ”, ovvero “l'affermazione P vale per qualche x ”. Essa asserisce che c'è *almeno un* ente (non necessariamente unico!) che gode della proprietà descritta da P .

\forall è il **quantificatore universale**.

L'espressione $\forall xP$ si legge: “per ogni x vale P ”, ovvero “l'affermazione P vale per tutti gli x ”. Essa asserisce che *ogni* ente gode della proprietà descritta da P .

Quando scriviamo un'affermazione del tipo $\exists xP$ o $\forall xP$ spesso siamo in una situazione in cui P afferma qualche proprietà che l'elemento x può avere o meno.

Esempio

Se P è l'equazione $x^2 + x = 0$, l'espressione $\exists xP$ dice che l'equazione data ammette una soluzione. Invece $\forall xP$ dice che ogni numero è soluzione di P .

Se invece P non dice nulla della variabile x , il significato di $\exists xP$ e di $\forall xP$ coincide con quello di P .

Esempio

Le espressioni $\exists x\exists y (y^2 + y = 0)$ e $\forall x\exists y (y^2 + y = 0)$ sono entrambe equivalenti a $\exists y (y^2 + y = 0)$: tutte e tre asseriscono che l'equazione $y^2 + y = 0$ ammette una soluzione.

La negazione di espressioni che iniziano con un quantificatore è un altro dei punti che può trarre in inganno se non si presta abbastanza attenzione al significato di ciò che si sta dicendo.

La frase

Non tutti i politici sono onesti.

(che è della forma $\neg\forall xP(x)$, dove $P(x)$ significa “ x è onesto”), non vuol dire che

Tutti i politici sono disonesti.

(ovvero $\forall x\neg P(x)$), bensì è equivalente a

Esiste (almeno) un politico disonesto.

(ovvero all'espressione $\exists x\neg P(x)$).

Similmente:

L'affermazione

Non esiste un vaccino pericoloso.

(che è della forma $\neg\exists xP(x)$, dove $P(x)$ sta per “ x è pericoloso”), non vuole dire che

Qualche vaccino è sicuro.

(ovvero $\exists x\neg P(x)$), bensì è equivalente a

Tutti i vaccini sono sicuri.

(ovvero all'espressione $\forall x\neg P(x)$).

Più in generale, negare $\forall xP$ significa dire che non tutti gli x godono della proprietà descritta da P , cioè c'è almeno un x per cui si può asserire $\neg P$. Viceversa, se neghiamo $\exists xP$ allora vuol dire che non si dà il caso che ci sia un x per cui vale P , cioè che per ogni x deve valere $\neg P$. Quindi

$$\neg\forall xP \equiv \exists x\neg P \quad \text{e} \quad \neg\exists xP \equiv \forall x\neg P.$$

Negando entrambi i termini di ciascuna delle equivalenze precedenti e applicando la legge della doppia negazione si ottiene

$$\forall xP \equiv \neg\exists x\neg P \quad \text{e} \quad \exists xP \equiv \neg\forall x\neg P.$$

Questo vuol dire che ciascuno dei due quantificatori \forall e \exists può essere “definito” a partire dall'altro quantificatore e dalla negazione.

Quando scriviamo $\forall x\forall yP$ intendiamo dire che in qualsiasi modo si scelgano gli elementi x e y vale P , e questo è la stessa cosa che dire $\forall y\forall xP$.

Analogamente $\exists x\exists yP$ ha lo stesso significato di $\exists y\exists xP$. Quindi

$$\exists x\exists yP \equiv \exists y\exists xP \quad \text{e} \quad \forall x\forall yP \equiv \forall y\forall xP.$$

Bisogna invece stare molto attenti quando si vuole scambiare due quantificatori di diverso tipo...

Supponiamo che valga $\exists x\forall yP$: questo vuol dire che c'è un \bar{x} tale che per ogni y vale P . Quindi è vero che dato un y arbitrario possiamo sempre trovare un x tale che P : basta prendere l'elemento \bar{x} di prima. In altre parole

$$\exists x\forall yP \models \forall y\exists xP.$$

Questa regola non può però essere invertita! Da $\forall y\exists xP$ non possiamo affatto concludere $\exists x\forall yP$: si considerino ad esempio le affermazioni $\forall y\exists x(y < x)$ e $\exists x\forall y(y < x)$ (nei numeri naturali, la prima è vera ma la seconda è falsa).

Questo vuol dire, in particolare, che le espressioni $\exists x\forall yP$ e $\forall y\exists xP$ *non* sono equivalenti: dalla prima segue la seconda, ma non viceversa.

Il quantificatore esistenziale si può distribuire e raccogliere rispetto alla disgiunzione nel seguente senso: dire che “c'è un x per cui P oppure c'è un x per cui Q ” è equivalente a dire “c'è un x per cui P o Q ”, in simboli

$$(\exists xP) \vee (\exists xQ) \equiv \exists x(P \vee Q).$$

Rispetto alla congiunzione, invece, solo una delle due possibili regole è valida: il quantificatore si può distribuire ma non raccogliere. Infatti, se “c'è un x tale che P e Q ” allora “c'è un x tale che P , e c'è un x tale che Q ”, in simboli

$$\exists x(P \wedge Q) \models (\exists xP) \wedge (\exists xQ).$$

Il viceversa però non vale: ad esempio, dal fatto che ci sia un numero naturale pari e ci sia un numero naturale dispari non possiamo concludere che esista un numero naturale che è sia pari che dispari.

Specularmente, il quantificatore universale si distribuisce e raccoglie rispetto alla congiunzione

$$(\forall xP) \wedge (\forall xQ) \equiv \forall x (P \wedge Q),$$

ma rispetto alla disgiunzione si può raccogliere

$$(\forall xP) \vee (\forall xQ) \models \forall x (P \vee Q),$$

ma non distribuire. Ad esempio, è vero che ogni numero naturale è o pari o dispari, ma da questo non si può concludere che tutti i numeri naturali sono pari o tutti i numeri naturali sono dispari.

Questo parallelismo tra il quantificatore esistenziale e la disgiunzione, da un lato, e il quantificatore universale e la congiunzione, dall'altro, non è così sorprendente, visto che i quantificatori possono essere visti come disgiunzioni e congiunzioni generalizzate: infatti, dire che vale $\exists xP(x)$ in \mathbb{N} equivale ad asserire $P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee \dots$, mentre dire che vale $\forall xP(x)$ in \mathbb{N} equivale ad asserire $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \dots$.